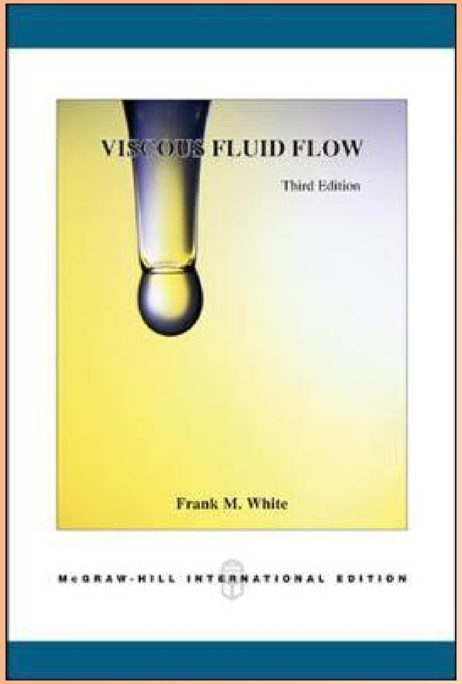


مکانیک سیالات پیشرفته

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی مکانیک

بخش اول از مباحث فصل سوم:
حل تحلیلی جریان سیالات

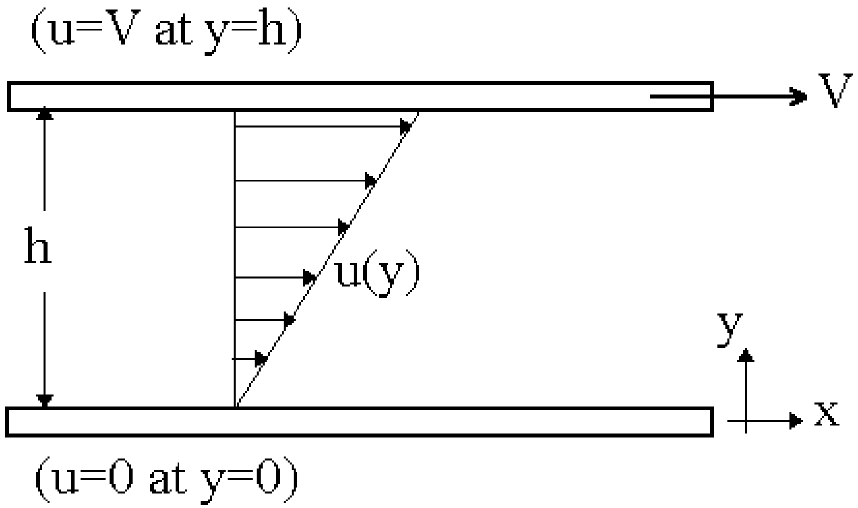
کلاس درس دکتر نوروزی
خرداد ۱۴۰۰

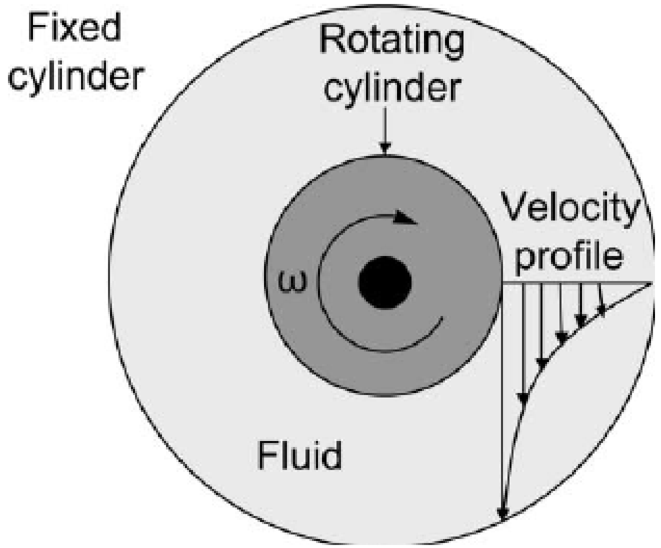
شرایط مرزی در جریان سیالات

شرط مرزی عدم لغزش

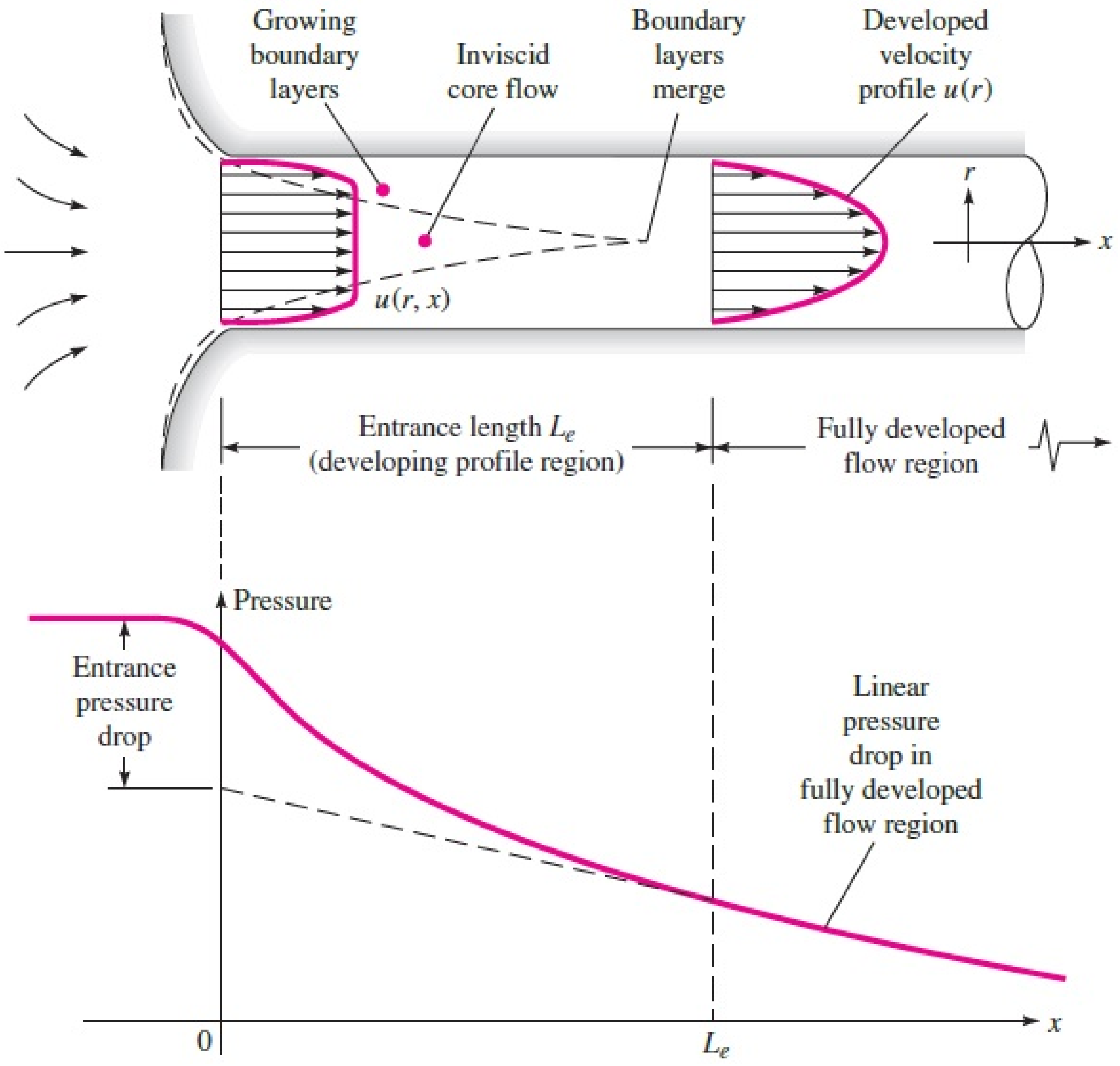
این شرط یکی از متداولترین شروط فیزیکی برای سرعت سیال روی دیواره جامد است. مطابق شرط مرزی عدم لغزش، سیال لزج به دیواره های جامد می چسبد و بنابراین سیال و دیواره جامد در محل دیوار هم سرعت هستند (در محل دیوار سرعت نسبی سیال و دیوار صفر است). به عبارت دیگر اگر دیوار ثابت باشد، سرعت سیال در محل دیوار نیز صفر است و اگر دیواره متحرک باشد، سرعت سیال در محل دیوار برابر سرعت دیواره جامد متحرک است.

موارد نقض: این شرط در مواردی نظیر، جریان در مقیاسهای میکرو و نانو، جریان سیالات غیرنیوتنی (بویژه مذابهای پلیمری) و جریان لبه لایه مرزی در اعداد ماخ بالا ممکن است که نقض شود.





شرط مرزی جریان سیالات در ورودی و خروجی کانالها



در ورودی معمولا یکی از دو شرط زیر اعمال می شود:

- توزیع سرعت جریان معلوم است.
- فشار مقداری ثابت است.

نکته ۱: توزیع سرعت یکنواخت (Uniform) در ورودی تقریبا معادل مکش کانال از یک مخزن بزرگ است.

در خروجی معمولا یکی از شرایط زیر اعمال می شود:

- توزیع سرعت جریان معلوم است.
- فشار مقداری ثابت است.
- جریان توسعه یافته است (یعنی گرادیان (مشتق) مولفه های سرعت و تنش نسبت به جهت پیشروی جریان صفر است. می توان نشان داد که در جریانهای توسعه یافته، گرادیان فشار مقداری ثابت است).

نکته ۲: فشار نسبی صفر در خروجی معادل تخلیه به اتمسفر است.

نکته ۳: اعمال تنها یکی از شرایط سرعت و فشار در هر مرز ورودی و خروجی کفایت می کند.

شرط مرزی صفحه تقارن

شرط مرزی تقارن مربوط به صفحاتی است که جریان نسبت به آنها تقارن دارد. اعمال این شرط سبب کاهش هزینه محاسباتی و افزایش دقت می شود. چنانچه t یک جهت مماس بر صفحه تقارن و n جهت عمود بر آن باشد، در اینصورت:

۱- برای کمیت های اسکالر: کمیتهای اسکالر نظیر دما و فشار روی صفحه تقارن اکسترمم هستند، یعنی:

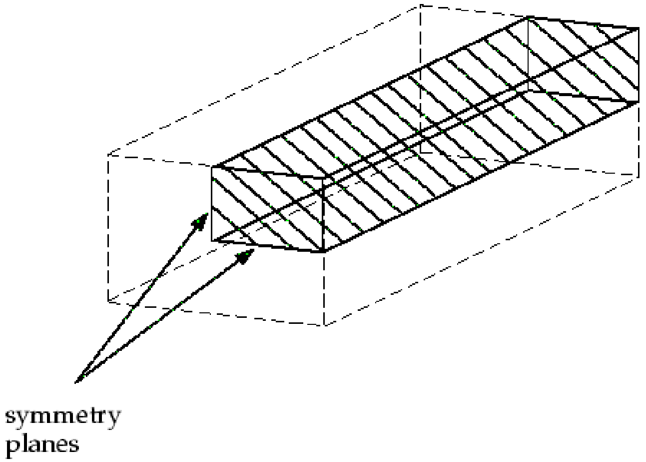
$$\frac{\partial p}{\partial n}=0, \quad \frac{\partial T}{\partial n}=0 \;\; \& \; ...$$

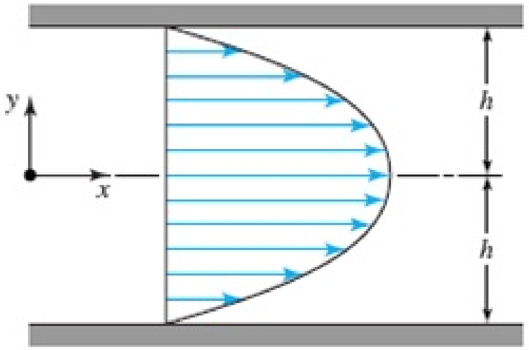
۲- برای کمیتهای برداری مانند سرعت، مولفه های مماس بر صفحه تقارن اکسترمم هستند اما مولفه عمود بر صفحه تقارن صفر است:

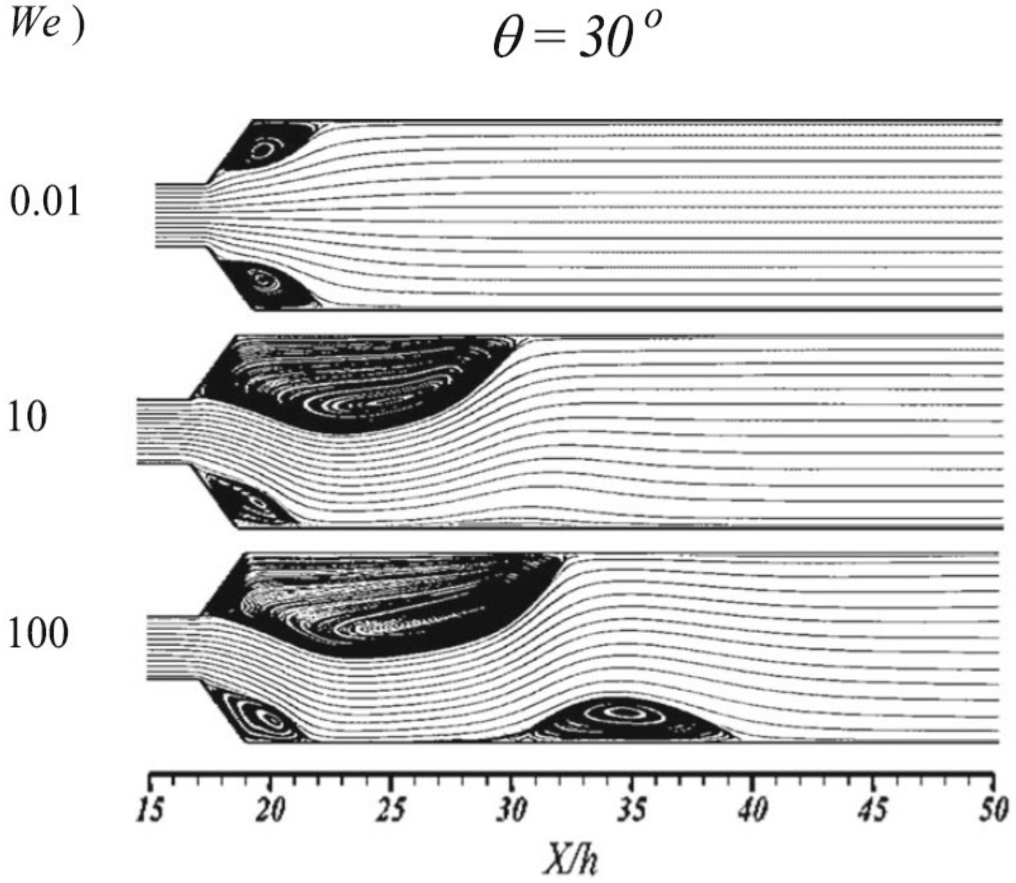
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_t}{\partial n}=0 \\ v_n=0 \end{cases}$$

۳- برای کمیت های تانسوری مانند تنش می توان نشان داد که از ۹ مولفه، ۵ مولفه اکسترمم و ۴ مولفه صفر هستند (**اثبات کنید**).

نکته بسیار مهم: متقارن بودن هندسه شرط لازم برای اعمال شرط مرزی تقارن است اما شرط کافی برای اعمال آن پایدار بودن جریان است. به عبارت دیگر اعمال این شرط در جریانهای دارای هندسه متقارن اما ناپایدار سبب تولید جوابهای کاملا **نادرست** می شود.







شرط مرزی متقارن محوری

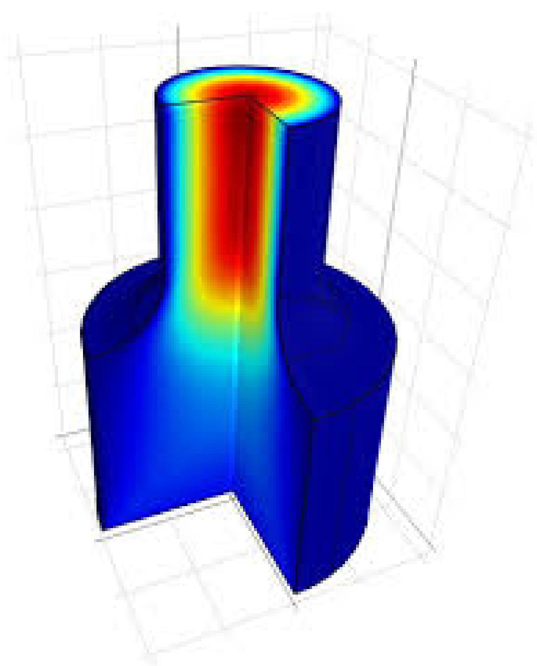
این شرط مرزی مربوط به هندسه هایی است که دارای محور تقارن هستند. معمولا این شرط مرزی در دستگاه مختصات استوانه ای و کروی برای توصیف جریانهایی نظیر جریان داخل لوله، جریان بین استوانه های هم مرکز ایستا و چرخان، جریان داخل نازلها و دیفیوزرها، جریان حول یک مخروط به موازات ارتفاع مخروط، جریان پایدار حول کره و نظایر آن قابل استفاده است. برای اعمال این شرط، معمولا محور Z روی محور تقارن منطبق می شود و در نتیجه برای کل ناحیه محاسباتی داریم:

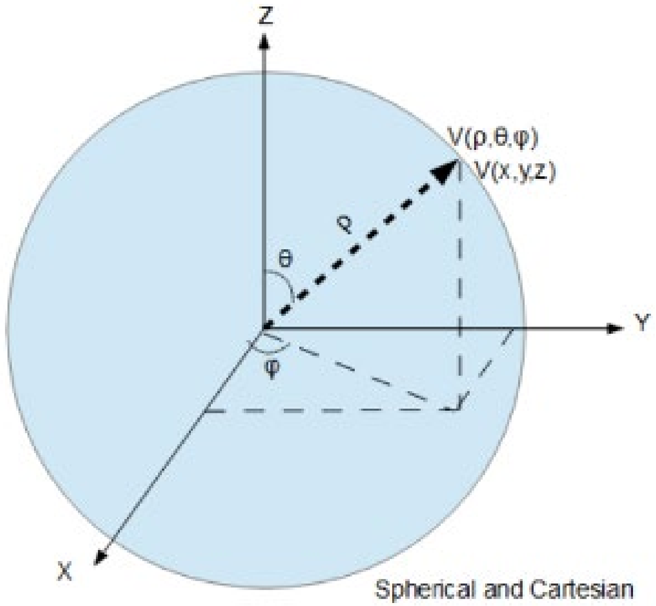
برای دستگاه مختصات استوانه ای: $$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

برای دستگاه مختصات کروی: $$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

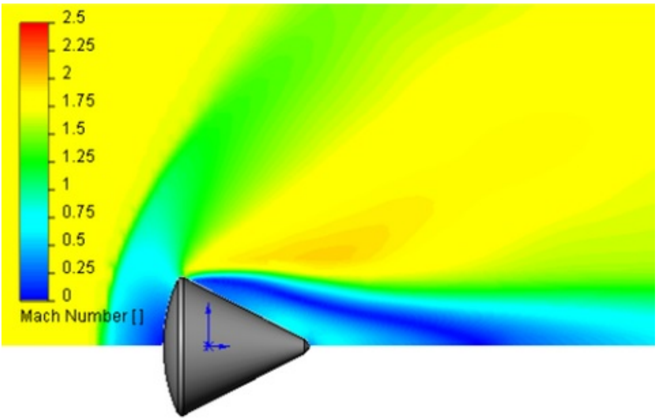
لذا هیچ کمیتی وابسته به جهت θ یا φ نیست و با اعمال این شرط یکی از ابعاد مساله کاهش می یابد. بنابراین اعمال این شرط به شدت به کاهش هزینه محاسباتی کمک می کند.

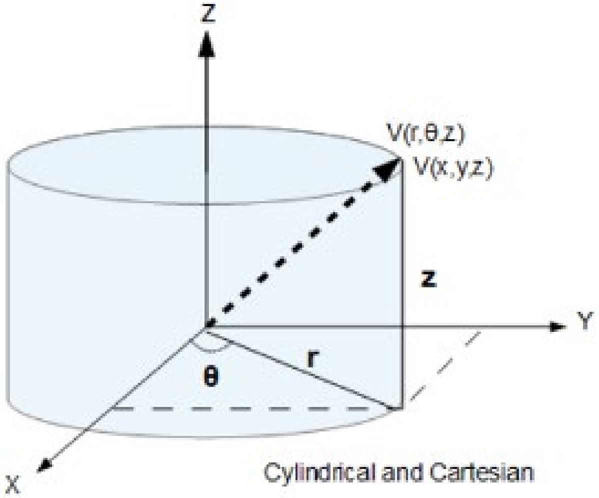
نکته: در دستگاه های مختصات استوانه ای و کروی بعضا نیاز به اعمال شرط اجتناب از سینگولاریتی (نقطه تکین) روی محور تقارن یا مبدا مختصات برای برخی از کمیتهای فیزیکی است.





Spherical and Cartesian





Cylindrical and Cartesian

شرط مرزی در مرز تماس دو سیال

چنانچه دو سیال دارای یک مرز تماس مشترک باشند (مانند مرز تماس یک مایع و یک گاز و یا مرز تماس میان دو مایع غیر قابل انحلال)، در این صورت روی این مرز داریم:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 \qquad \tau_1 = \tau_2$$

چنانچه یکی از سیالات مایع و دیگری گاز باشد، در دو حالت زیر امکان بدست آوردن شرط مرزی ساده تری برای فاز مایع در فصل مشترک وجود دارد:

۱- عامل جریان در فاز مایع، اثر برشی ناشی از جریان گاز باشد (مانند جریان در سطح آب در اثر وزش باد روی آن). در این حالت فرض می شود که یک تنش برشی ثابت از سمت گاز به مایع اعمال می شود:

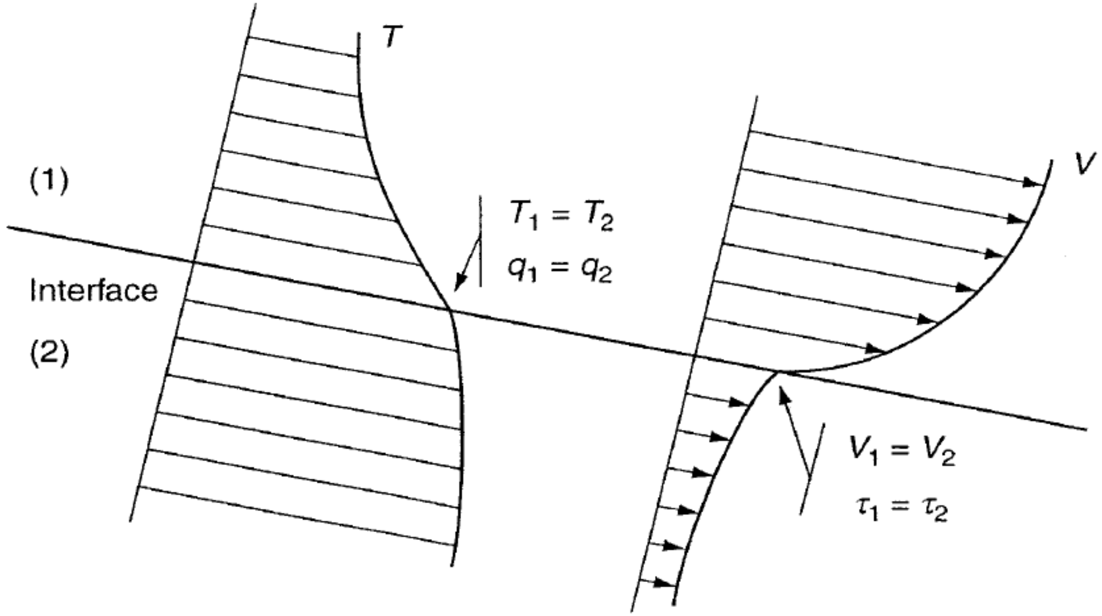
$$\tau_{Liquid} = K \;\rightarrow\; \mu \frac{\partial v_t}{\partial n} = K \;\rightarrow\; \frac{\partial v_t}{\partial n} = \frac{K}{\mu}$$

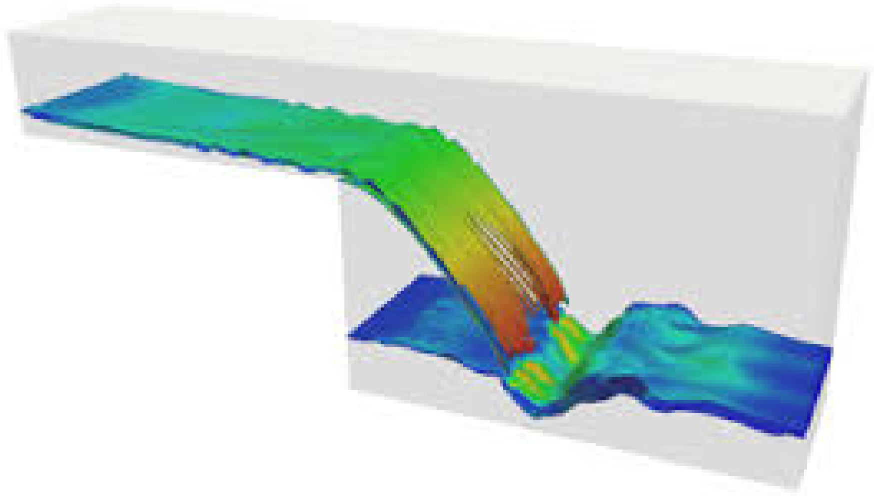
۲- عامل جریان در فاز مایع ناشی از برش در گاز نباشد (برای نمونه جریان آب روی یک سطح شیبدار که ناشی از گرانش است).

$$\tau_{Liquid} = \tau_{Gas} \;\rightarrow\; \left(\mu \frac{\partial v_t}{\partial n}\right)_{Liquid} = \left(\mu \frac{\partial v_t}{\partial n}\right)_{Gas}$$

$$\left.\frac{\partial v_t}{\partial n}\right|_{Liquid} = \frac{\mu_{Gas}}{\mu_{Liquid}} \left(\frac{\partial v_t}{\partial n}\right)_{Gas} \xrightarrow{\mu_{Liquid} \gg \mu_{Gas}} \left.\frac{\partial v_t}{\partial n}\right|_{Liquid} \approx 0$$

در روابط فوق، t جهت مماس بر مرز تماس و n جهت عمود بر آن است.



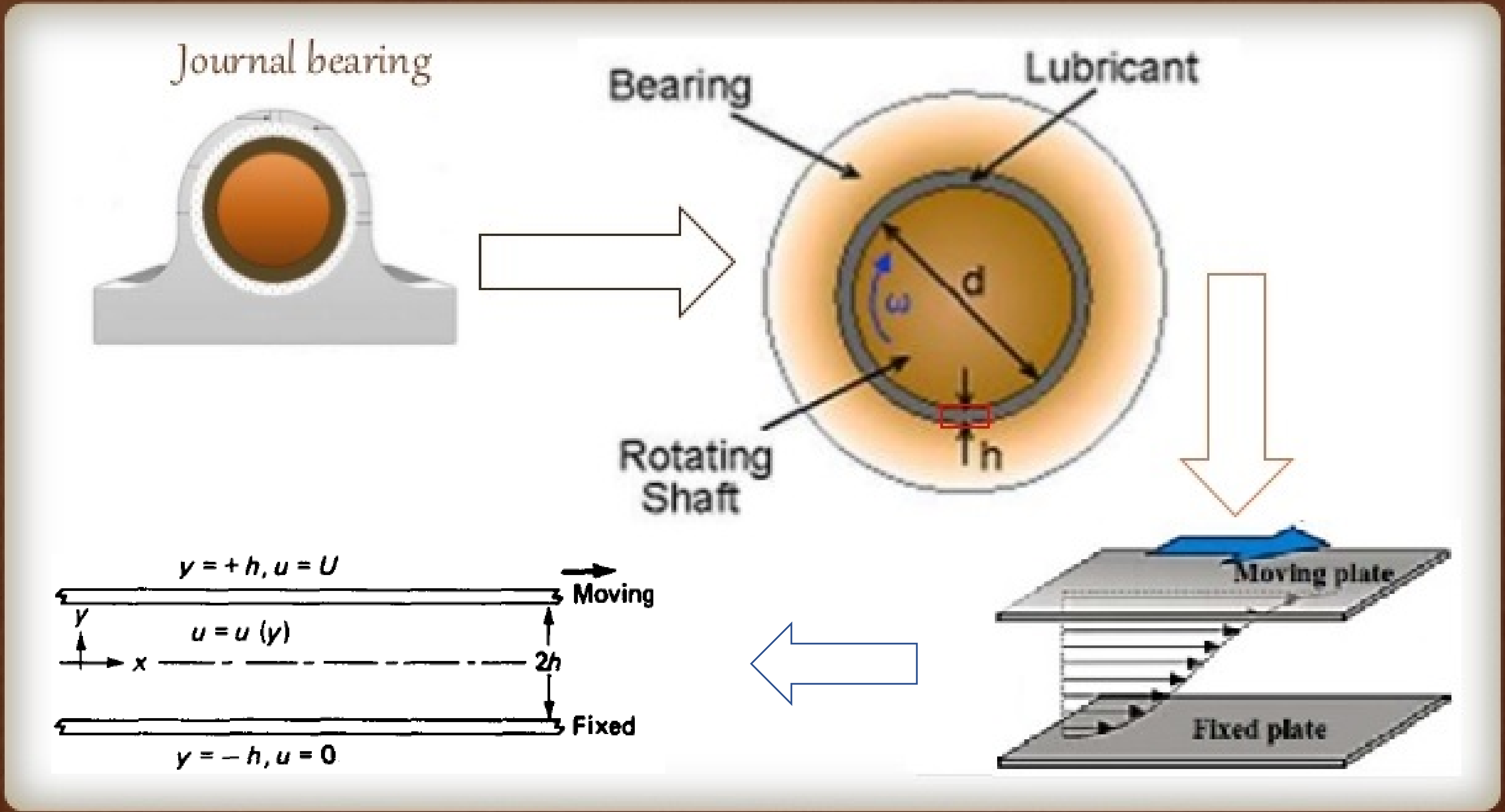


حلهای تحلیلی

۱- جریان کوئت دارای گرادیان فشار: جریان سیال لزج بین دو صفحه موازی که یکی ثابت و دیگری متحرک است به جریان کوئت (Couette Flow) معروف است. در اینجا فرض شده که علاوه بر حرکت صفحه بالایی، عامل دیگری بر جریان موثر است و آن وجود یک گرادیان فشار ثابت است. از کاربردهای مهم این مساله، تحلیل جریان در یاتاقانها است. با فرض وجود جریان آرام، تراکم ناپذیر، دائمی، دوبعدی، توسعه یافته و با صرفنظر از اثرات گرانش رابطه توزیع سرعت جریان را بدست آورید:

برای معادلات ناویراستوکس در حالت تراکم ناپذیر دو بعدی داریم:

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{V}=0\\&\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\mathbf{g}-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{V}\end{aligned}\right\}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\ \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\rho g_x-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=\rho g_y-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\dfrac{\partial^2v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2v}{\partial y^2}\right)\end{cases}\qquad(۱)$$



Journal bearing
Bearing
Lubricant
d
ω
h
Rotating Shaft
Moving plate
Fixed plate
y = +h, u = U
Moving
u = u (y)
y
x
2h
Fixed
y = − h, u = 0

با فرض دائمی بودن ($\frac{\partial}{\partial t}$)، توسعه یافته بودن $(\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0)$ و صرفنظر از اثرات گرانش، از معادله (۱) داریم:

$$\begin{cases} \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}+u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\cancel{\rho g_x}-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \rho\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}+u\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\cancel{\rho g_y}-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{cases} \qquad (۲)$$

توجه داشته باشید که هنگامی که مشتق یک پارامتر نسبت به متغیری صفر است مفهوم آن است که آن پارامتر تابعی از آن متغیر نیست. مثلا

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}=0 \rightarrow u\neq u(x) \\ &\frac{\partial v}{\partial x}=0 \rightarrow v\neq v(x) \\ &\frac{\partial v}{\partial t}=0 \rightarrow v\neq v(t) \end{aligned} \qquad (۳)$$

حال از ترمهای باقیمانده معادله (۲)، برای معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0 \;\rightarrow\; v\neq v(y) \qquad (۴)$$

از معادلات (۳) و (۴) دانستیم که v نه تابعی از x و نه تابعی از y و نه تابع زمان t است. بنابراین تنها شانس وجود v آن است که یک عدد ثابت مثل c باشد. برای شرایط مرزی v داریم:

$$at \;\; y=\pm h \;\rightarrow\; v=0 \qquad (۵)$$

با اعمال این شرط مرزی به سادگی داریم:

$$c=0 \;\rightarrow\; v=0 \;\; \text{(at whole of flow)} \qquad (۶)$$

با توجه به رابطه (۶)، مقدار سرعت v در کل میدان جریان برابر صفر است. حال از ترمهای باقیمانده معادله مومنتوم در جهت y نتیجه می شود:

$$\rho\left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \xrightarrow{v=0} \frac{\partial p}{\partial y}=0 \;\rightarrow\; p\neq p(y)\rightarrow\; p=p(x) \qquad (۷)$$

تا اینجا دانستیم که u تنها تابعی از y و p تنها تابعی از x است (هر دو یک متغیره هستند).

برای ترمهای باقیمانده معادله مومنتوم در جهت x داریم (توجه شود که مقدار سرعت v برابر صفر است):

$$-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{d^2u}{dy^2}=0 \rightarrow \frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}=cte \qquad (۸)$$

با دو بار انتگرال گیری از رابطه (۸)، داریم:

$$\frac{du}{dy}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y+c_1 \qquad \& \qquad u=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2}+c_1y+c_2 \qquad (۹)$$

برای شرایط مرزی مولفه سرعت u داریم:

$$\begin{aligned} &at\ \ y=-h \ \rightarrow\ u=0 \\ &at\ \ y=h \ \rightarrow\ u=U \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

با اعمال شرایط مرزی فوق الذکر (معادله (۱۰)) در معادله (۹) نتیجه می شود:

$$\begin{cases} at\ \ y=-h \ \rightarrow\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{dp}{dx}\dfrac{h^2}{2}-c_1h+c_2=0 \\ at\ \ y=h \ \rightarrow\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{dp}{dx}\dfrac{h^2}{2}+c_1h+c_2=U \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -c_1h+c_2=-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{dp}{dx}\dfrac{h^2}{2} \\ c_1h+c_2=U-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{dp}{dx}\dfrac{h^2}{2} \end{cases} \qquad (۱۱)$$

از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول (۱۱) داریم:

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{U}{2h} \\ c_2 = \dfrac{U}{2} - \dfrac{h^2}{2\mu}\dfrac{dp}{dx} \end{cases} \tag{۱۲}$$

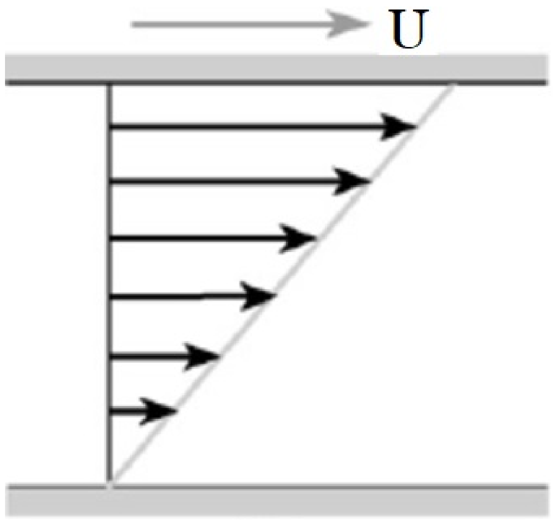
با قرار دادن مقادیر (۱۲) در رابطه (۹) نتیجه می شود:

$$u = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + \frac{U}{2h}y + \frac{U}{2} - \frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx} \tag{۱۳}$$

در نهایت با مرتب کردن رابطه (۱۳) می توان رابطه زیر را برای پروفیل سرعت ارائه کرد:

$$\boxed{u = \frac{U}{2}\left(1 + \frac{y}{h}\right) - \frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]} \tag{۱۴}$$

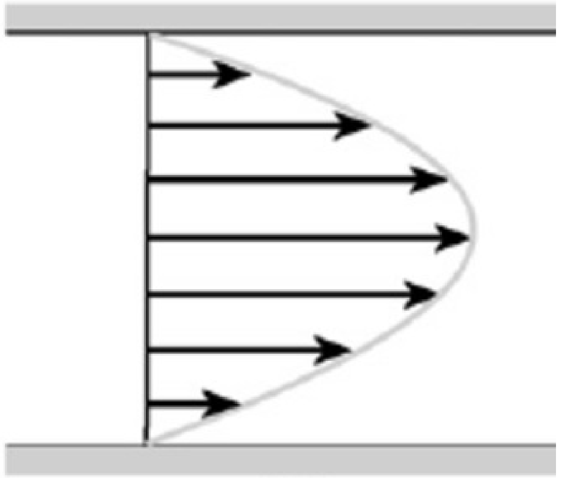
آنالیز نتایج حل بدست آمده:



الف) اگر گرادیان فشار صفر باشد، در اینصورت مساله به جریان کوئت (جریان برشی ساده) ساده می شود. در این حالت تنها عامل جریان، وجود صفحه متحرک بالایی است. شکل بعد دار و بی بعد این پروفیل به شکل زیر است:

$$u=\frac{U}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right) \;\rightarrow\; u^{*}=0.5(1+y^{*}),\quad u^{*}=\frac{u}{U},\quad y^{*}=\frac{y}{h} \qquad (۱۵)$$

پروفیل سرعت بدست آمده در رابطه (۱۵) یک پروفیل خطی است که پیشتر هم در خصوص آن بحث کرده بودیم.



ب) اگر صفحه بالایی ثابت باشد در اینصورت تنها عامل جریان وجود یک گرادیان فشار ثابت خواهد بود:

$$u=-\frac{h^{2}}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^{2}\right] \qquad (۱۶)$$

این مساله معرف جریان توسعه یافته بین دو صفحه موازی دارای گرادیان فشار ثابت است.

در خصوص حالت-ب (جریان بین دو صفحه موازی دارای گرادیان فشار) می توان دریافت که پروفیل سرعت نسبت به صفحه xz متقارن است (با توجه به شکل نیمه بالایی پروفیل سرعت با نیمه پایینی آن یکسان است). در این حالت ماکزیمم سرعت روی محور x ها قرار دارد (یعنی در $y=0$). بنابراین از رابطه (۱۶) داریم:

$$u=-\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]\xrightarrow{at\ y=0:\ u=u_{max}}u_{max}=-\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx} \tag{۱۷}$$

لذا برای پروفیل سرعت می توان نوشت:

$$u=u_{max}\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right] \tag{۱۸}$$

از روابط فصل سوم برای متوسط سرعت جریان ($\bar{u}$) داریم:

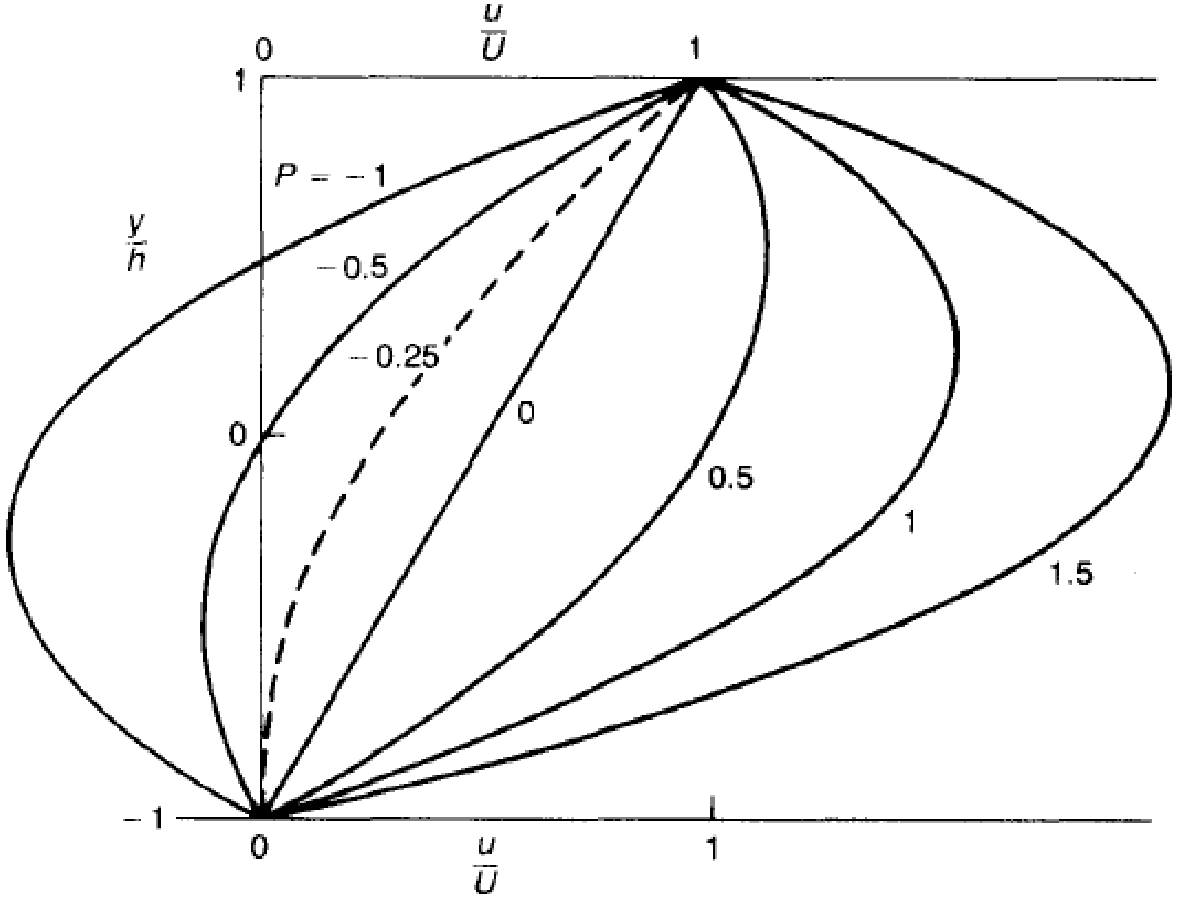
$$\bar{u}=\frac{Q}{A}=\frac{1}{A}\int_A u\,dA=\frac{1}{2hb}\int_{-h}^{h}u_{max}\left[1-(y/h)^2\right]b\,dy=\frac{2}{3}u_{max}\ \rightarrow\ u_{max}=1.5\bar{u} \tag{۱۹}$$

و لذا با جایگذاری نتیجه رابطه (۱۹) در رابطه (۱۸)، شکل بی بعد توزیع سرعت را می توان بدست آورد:

$$\frac{u}{\bar{u}}=1.5\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]\xrightarrow{u^*=\frac{u}{\bar{u}}\ \&\ y^*=\frac{y}{h}}u^*=1.5\left[1-(y^*)^2\right] \tag{۲۰}$$

ج) حالت کلی که در آن عامل جریان ترکیب اثر حرکت صفحه بالایی و گرادیان فشار است و لذا سرعت مستقیما از رابطه (۱۴) محاسبه می شود. این رابطه را می توان بصورت زیر نیز نوشت:

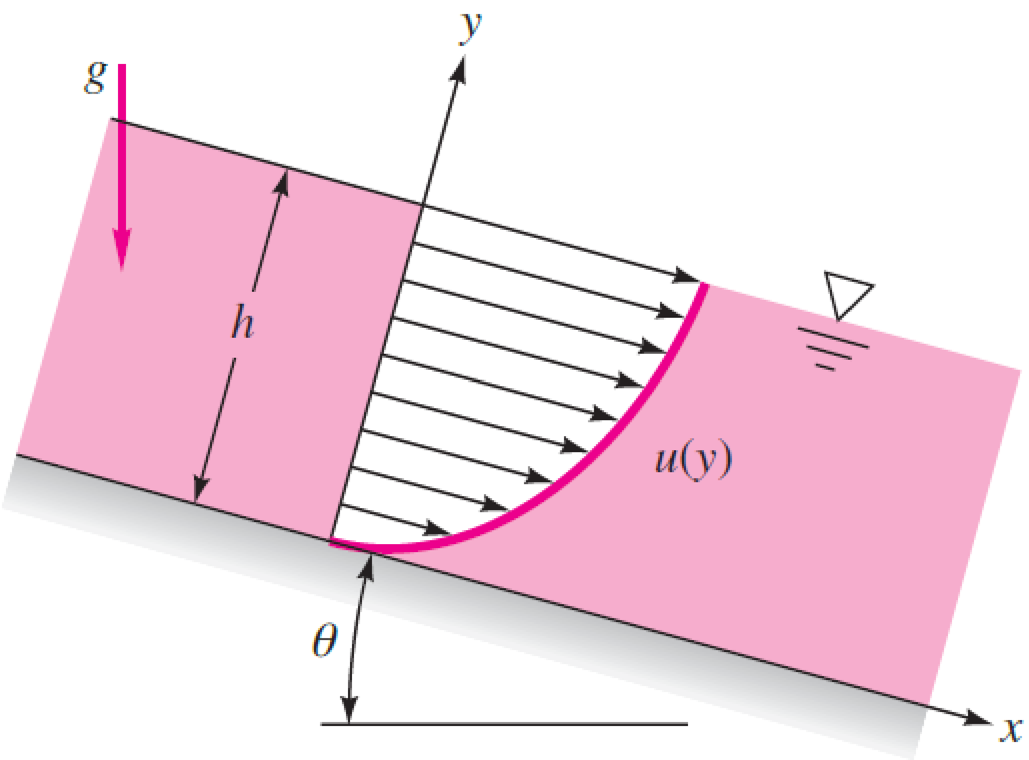
$$\frac{u}{U}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)+P\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right], \qquad P=-\left(\frac{dp}{dx}\right)\frac{h^2}{2\mu U} \qquad (۲۱)$$



در شکل، پروفیل سرعت به ازای مقادیر مختلف پارامتر P نشان داده شده است. مطابق شکل، پروفیلهای سرعت سهمی های غیرمتقارنی هستند که به ازای مقادیر مثبت P ماکزیمم آنها به سمت دیواره بالایی متمایل است و با ازدیاد مقدار P نقطه ماکزیمم به خط مرکز نزدیک می شود (حالت حدی، حالت-ب است). شایان ذکر است که مقادیر مثبت p (یا گرادیان فشار منفی) معرف گرادیان فشار مساعد است. به ازای مقادیر منفی P (گرادیان فشار نامساعد) ممکن است که جریان برگشتی در میدان جریان ایجاد شود. همچنین به ازای مقادیر منفی p حالت جالبی وجود دارد که در آن دبی عبوری بین دو صفحه صفر است (تمرین: چه رابطه ای بین سرعت صفحه بالایی و گرادیان فشار باید برقرار باشد تا دبی صفر شود؟).

۲- جریان روی سطح شیبدار

جریان یک فیلم نازک از یک سیال لزج را در نظر بگیرید که روی یک سطح شیبدار جاری است. با فرض جریان آرام، تراکم ناپذیر، دو بعدی، دائمی و توسعه یافته، پروفیل سرعت جریان را بدست آورید.



نکته: در اینجا عامل جریان گرانش است و به دلیل تماس جریان با فضای آزاد بدیهی است که گرادیان فشار در جهت x ایجاد نمی شود. در اینجا به مانند بسیاری از مسائل مربوط به سطوح شیبدار، دستگاه مختصات روی سطح شیبدار سوار شده است بنابراین شتاب گرانش دارای دو تصویر به صورت زیر در جهات x و y است.

$$g_x = g\sin\theta,\ \ g_y = -g\cos\theta, \tag{۲۲}$$

مانند مثال قبل با شروع از معادلات ناویراستوکس حالت دو بعدی داریم:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{V}=0\\ &\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\mathbf{g}-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{V}\end{aligned}\right\}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\ \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\rho g_x-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=\rho g_y-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\end{cases} \tag{۲۳}$$

با فرض دائمی بودن ($\frac{\partial}{\partial t}$)، توسعه یافته بودن $(\frac{\partial u}{\partial x}=0, \ \frac{\partial v}{\partial x}=0)$ و صرفنظر از گرادیان فشار در جهت x داریم:

$$\begin{cases} \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}+u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\rho g_x-\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \rho\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}+u\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{cases} \qquad (۲۴)$$

مشابه مثال قبل با شروع از معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0 \ \rightarrow \ v\neq v(y) \qquad (۲۵)$$

با توجه به توسعه یافتگی، دائمی بودن و رابطه (۲۵)، نتیجه می شود که v تابع متغیرهای x، y و t نیست. بنابراین تنها شانس وجود v آن است که یک عدد ثابت مثل c باشد. برای شرایط مرزی v داریم:

$$at \ \ y=0 \ \ and \ \ y=h \ \rightarrow \ v=0 \qquad (۲۶)$$

با اعمال این شرط مرزی به سادگی داریم:

$$c=0 \;\rightarrow\; v=0 \;\;\text{(at whole of flow)} \qquad (۲۷)$$

با توجه به رابطه (۲۷)، به مانند مثال قبل، مقدار سرعت v در کل میدان جریان برابر صفر است. برای ترمهای باقیمانده معادله مومنتوم در جهت x داریم (توجه شود که مقدار سرعت v برابر صفر است و u نیز تابعی یک متغیره از x است):

$$\rho g_x+\mu\frac{d^2u}{dy^2}=0 \;\rightarrow\; \frac{d^2u}{dy^2}=-\frac{\rho}{\mu}g\sin\theta \;\rightarrow\; \frac{d^2u}{dy^2}=-\frac{g\sin\theta}{\nu} \qquad (۲۸)$$

با دو بار انتگرال گیری متوالی از رابطه (۲۸) داریم:

$$\frac{du}{dy}=-\frac{g\sin\theta}{\nu}y+c_1 \qquad (۲۹)$$

$$u=-\frac{g\sin\theta}{\nu}\frac{y^2}{2}+c_1y+c_2 \qquad (۳۰)$$

برای شرایط مرزی مولفه سرعت u داریم (در سطح سیال از شرط مرزی فصل مشترک مایع-گاز استفاده شده است):

$$\begin{cases} at\; y=0 \;\rightarrow\; u=0 \\ at\; y=h \;\rightarrow\; \dfrac{du}{dy}=0 \end{cases} \qquad (۳۱)$$

با قرار دادن شرایط مرزی فوق در روابط (۲۹) و (۳۰) داریم:

$$\begin{cases} at\; y=0 \;\rightarrow\; c_2=0 \\ at\; y=h \;\rightarrow\; -\dfrac{g\sin\theta}{\nu}h+c_1=0 \;\rightarrow\; c_1=\dfrac{gh\sin\theta}{\nu} \end{cases} \qquad (۳۲)$$

لذا برای پروفیل سرعت داریم:

$$u=-\frac{g\sin\theta}{\nu}\frac{y^2}{2}+\frac{gh\sin\theta}{\nu}y \qquad (۳۳)$$

در نهایت با مرتب کردن رابطه (۳۳) داریم:

$$\boxed{u=\frac{gh^2\sin\theta}{\nu}\left(\frac{y}{h}\right)\left(1-\frac{y}{2h}\right)} \qquad (۳۴)$$

همچنین برای سرعت متوسط این جریان داریم:

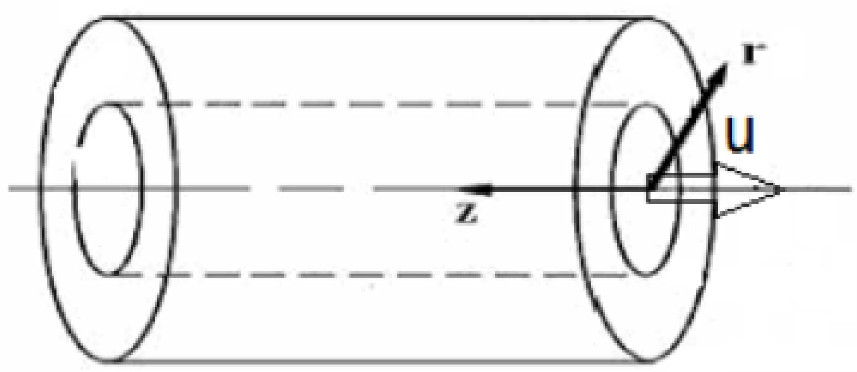
$$\bar{u}=\frac{Q}{A}=\frac{1}{A}\int_A udA=\frac{1}{hb}\int_0^h ubdy=\frac{gh^2\sin\theta}{3\nu}\ \rightarrow\ \frac{gh^2\sin\theta}{\nu}=3\bar{u} \qquad (۳۵)$$

لذا برای سرعت به شکل بی بعد می توان نوشت:

$$u^*=3y^*\left(1-y^*/2\right),\quad u^*=u/\bar{u},\ \ y^*=y/h \qquad (۳۶)$$

می توان نشان داد که با حل معادله مومنتوم در جهت y، به رابطه فشار هیدرواستاتیک می رسیم.

۳- فرض کنید که یک سیال لزج در فضای بین دو استوانه طویل هم مرکز به شعاعهای r_i و r_o قرار دارد. استوانه خارجی ثابت و استوانه داخلی با سرعت ثابت u حرکت انتقالی در راستای محور استوانه دارد. با فرض جریان آرام، دائمی، تراکم ناپذیر، توسعه یافته و با صرفنظر از اثرات گرانش، توزیع سرعت میدان جریان را بدست آورید.



با شروع از معادلات پیوستگی و مومنتوم در جهت z در دستگاه مختصات استوانه ای داریم:

$$\begin{cases} Continuity: \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(v_z)=0 \\ The\ Z-momentum\ \ equation: \\ \frac{\partial v_z}{\partial t}+(V.\nabla)v_z=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g_z+\nu\nabla^2 v_z \end{cases} \qquad (۳۷)$$

شکل باز این معادلات بصورت زیر است:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(v_z)=0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g_z+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_z}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] \end{cases} \qquad (۳۸)$$

فرضیات:

- دائمی بودن: $(\frac{\partial}{\partial t}=0)$
- طویل بودن استوانه‌ها: $(\frac{\partial}{\partial z}=0)$
- جریان محوری در جهت Z $(v_\theta=0)$ و **تقارن** محوری در جهت θ: $(\frac{\partial}{\partial \theta}=0)$
- نبود گرادیان فشار
- صرف نظر از اثرات گرانش

معادلات به صورت زیر ساده‌سازی می‌شوند:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)+\frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial}{\partial \theta}}(v_\theta)+\cancel{\frac{\partial}{\partial z}}(v_z)=0 \\ \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}}+\cancel{v_r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r}v_\theta\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}}+v_z\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}}=-\frac{1}{\rho}\cancel{\frac{\partial p}{\partial z}}+\cancel{g_z}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_z}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}\right] \end{cases} \quad (۳۹)$$

برای ترمهای باقیمانده معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rv_r\right)}{\partial r}=0 \qquad (۴۰)$$

همچنین می دانیم:

$$\frac{\partial v_r}{\partial \theta}=0 \rightarrow v_r \neq v_r(\theta)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z}=0 \rightarrow v_r \neq v_r(z) \qquad (۴۱)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}=0 \rightarrow v_r \neq v_r(t)$$

لذا برای پاسخ معادله (۴۰) داریم:

$$\frac{\partial\left(rv_r\right)}{\partial r}=0 \rightarrow rv_r=c_1 \rightarrow v_r=c_1/r \qquad (۴۲)$$

با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$at\ r=r_i\ \ and\ r=r_o \rightarrow v_r=0 \longrightarrow c_1=0 \longrightarrow v_r=0\ \ at\ whole\ of\ \ flow \qquad (۴۳)$$

حال با نوشتن معادلات مومنتوم در جهات r و θ نتیجه می شود که تمامی ترمهای صفر هستند و لذا این معادلات به نتیجه خاصی منجر نمی شوند. از معادله (۳۹)، برای ترمهای باقیمانده معادله مومنتوم در جهت z داریم:

$$\upsilon\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)\right]=0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)=0 \tag{۴۴}$$

با مشتق گیری خواهیم داشت:

$$\frac{d^2v_z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv_z}{dr}=0 \quad \rightarrow \quad v_z''+\frac{1}{r}v_z'=0$$

$$r^2\times\left(v_z''+\frac{1}{r}v_z'=0\right)$$

$$r^2v_z''+rv_z'=0 \tag{۴۵}$$

معادله دیفرانسیل (۴۵)، یک معادله دیفرانسیل از نوع کوشی اویلر است.

در این حالت خاص، حل این معادله از طریق کاهش مرتبه امکان پذیر است:

$$\frac{dv_z}{dr}=f$$

$$f'+\frac{1}{r}f=0$$

$$e^{\int\frac{1}{r}dr}=e^{\ln r}=r$$

فاکتور انتگرال حل معادله مرتبه اول

$$r\times(f'+\frac{1}{r}f)=r\times 0$$

$$rf'+f=0$$

$$\frac{d}{dr}(rf)=0$$

$$rf=c_2$$

$$f=\frac{c_2}{r}$$

$$\frac{dv_z}{dr}=\frac{c_2}{r}$$

$$v_z=c_2\ln r+c_3 \qquad (۴۶)$$

شرایط مرزی:

$$at \begin{cases} r=r_o \\ r=r_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_z=0 \\ v_z=u \end{cases} \qquad (۴۷)$$

اعمال شرایط مرزی:

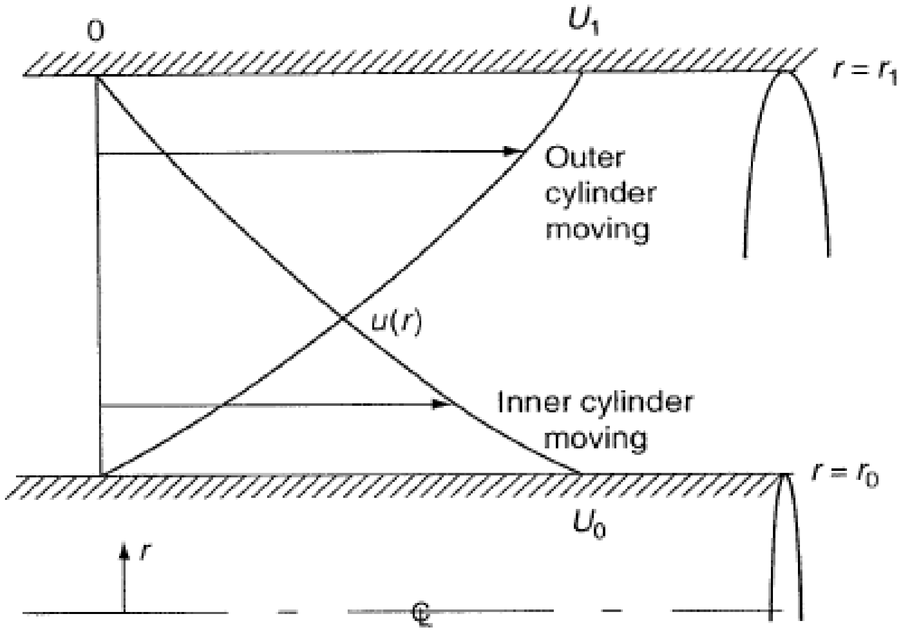
$$\begin{cases} r=r_o \rightarrow v_z=0=c_2\ln r_o+c_3 \rightarrow c_3=-c_2\ln r_o \\ r=r_i \rightarrow v_z=u=c_2\ln r_i+c_3 \rightarrow u=c_2(\ln r_i-\ln r_o) \end{cases} \qquad (۴۸)$$

$$\begin{cases} c_2=\dfrac{u}{\ln r_i-\ln r_o}=\dfrac{u}{\ln\dfrac{r_i}{r_o}} \\ c_3=-\dfrac{u}{\ln r_i-\ln r_o}\ln r_o=-\dfrac{u\ln r_o}{\ln\dfrac{r_i}{r_o}} \end{cases} \qquad (۴۹)$$

با جایگذاری c_2 و c_3 در v_z، توزیع سرعت به دست خواهد آمد.

$$v_z = \frac{u}{\ln\frac{r_i}{r_o}}\ln r - \frac{u}{\ln\frac{r_i}{r_o}}\ln r_o = \frac{u}{\ln\frac{r_i}{r_o}}(\ln r - \ln r_o) = u\frac{\ln\frac{r}{r_o}}{\ln\frac{r_i}{r_o}}$$

$$\boxed{v_z = u\frac{\ln\frac{r}{r_o}}{\ln\frac{r_i}{r_o}}} \qquad (۵۰)$$




THANK YOU
HAVE A GREAT WEEK